UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA
DACIBAHCC

P.A. 2012-1
16/05/2012

# EXAMEN PARCIAL DE METODOS NUMERICOS (MB536)

- **SOLO SE PERMITE EL USO DE UNA HOJA DE FORMULARIO A4 Y CALCULADORA**
- **NO SE PERMITE EL INTERCAMBIO DE HOJA DE FORMULARIO.**
- **ESCRIBA CLARAMENTE SUS PROCEDIMIENTOS CON LETRA LEGIBLE, ESCRIBA CON LAPICERO AZUL O NEGRO.**
- **PROHIBIDO EL USO DE CELULARES U OTROS EQUIPOS DE COMUNICACION ELECTRONICA**
- **DURACION: 110 MINUTOS.**

## Problema 1

a) El período de oscilación de un péndulo de longitud $l$ es igual a: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ , donde g es la aceleración de la gravedad.

a.1) (1.5 ptos)¿Con que precisión debe medirse la longitud del péndulo, cuyo período de oscilación, es aproximadamente 2s, para conocer este período de oscilación con un error relativo del 0,5%?

a.2) (1.5 ptos)¿Con que exactitud deben tomarse los valores de π y de $g$?

*b)* (2 puntos) ***Propagación de errores en el producto***.-
El error relativo del producto es igual a la suma de los errores relativos de dichas magnitudes: $q = xy \Rightarrow \frac{\xi_q}{|q|} \approx \frac{\xi_x}{|x|} + \frac{\xi_y}{|y|}$

Implementar una función en MatLab que calcule $\xi_q$ dado $x$, $y$, $\xi_x$, $\xi_y$ con la siguiente cabecera:

```
function dxy = ErrorProducto(x,y,dx,dy)
```

## Solución:

a.1)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$dT < \frac{0.5}{100}$ $\qquad dT < \frac{1}{200}$

Calculo de $dT$

$$dT = \frac{\partial T}{\partial \pi}d\pi + \frac{\partial T}{\partial l}dl + \frac{\partial T}{\partial g}dg$$

$$dT = 2\sqrt{\frac{l}{g}}d\pi + \frac{\pi}{\sqrt{gl}}dl + \frac{\pi}{g}\sqrt{\frac{l}{g}}dg$$

$$\frac{dT}{T} = \frac{d\pi}{\pi} + \frac{2}{l}dl + \frac{2}{g}dg < \frac{1}{200}$$

Así se tiene:

$$\frac{d\pi}{\pi} < \frac{1}{3(200)}$$
$$\frac{2}{l}dl < \frac{1}{3(200)}$$
$$\frac{2}{g}dg < \frac{1}{3(200)}$$

de donde $dl < \frac{1}{1200}$

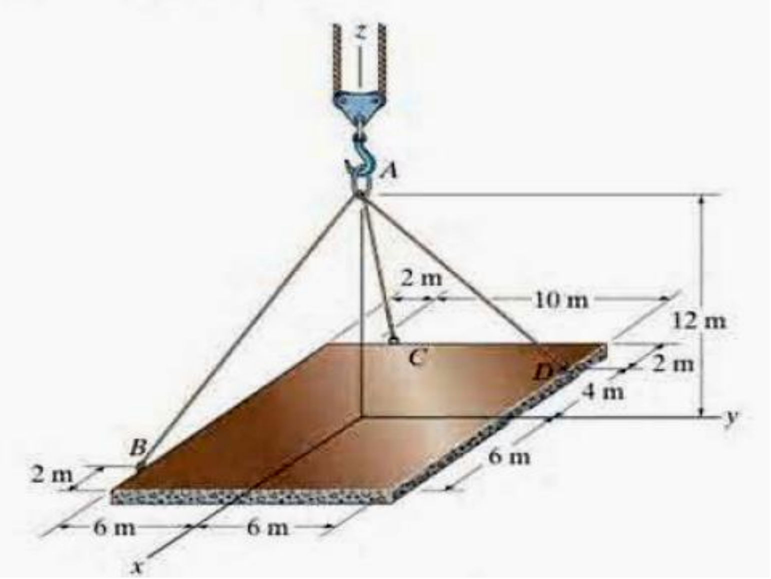
a.2)
Los valores de π y de $g$ deben ser tomados con un error relativo de:

$d\pi < \frac{1}{600}$, $\quad dg < \frac{1}{1200}$

b)

```
function dxy = ErrorProducto(x,y,dx,dy)
    modulox = abs(x);
    moduloy = abs(y);
    suma = (dx/modulox + dy/moduloy)
    dxy = (x*y)*suma;
end
```

**Problema 2**
Se desea determinar la tensión en los cables para mantener en equilibrio la placa rectangular de 200 Newtons de peso.




Se tiene la expresión vectorial de cada una de las tensiones de las cuerdas y del peso de la placa:

$$\vec{T}_{BA} = T_{BA}\left(\frac{-4\hat{i} + 6\hat{j} + 12\hat{k}}{14}\right) \qquad \vec{T}_{CA} = T_{CA}\left(\frac{6\hat{i} + 4\hat{j} + 12\hat{k}}{14}\right)$$

$$\vec{T}_{DA} = T_{DA}\left(\frac{4\hat{i} - 6\hat{j} + 12\hat{k}}{14}\right) \qquad \vec{W} = -200\,\hat{k}$$

Donde $\hat{i},\ \hat{j}\ y\ \hat{k}$ son los vectores unitarios en los ejes x, y y z, respectivamente. Además para el equilibrio se requiere: $\vec{T}_{BA} + \vec{T}_{CA} + \vec{T}_{DA} + \vec{W} = \vec{0}$

a) Plantear el sistema de ecuaciones lineal para determinar las magnitudes de las tensiones:

$$AT = b \qquad T = \begin{bmatrix} \vec{T}_{BA} \\ \vec{T}_{CA} \\ \vec{T}_{DA} \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 200 \end{bmatrix}$$

b) Verifique si resulta convergente al aplicar la iteración de Jacobi, si cumple la condición de convergencia realice 03 iteraciones partiendo de un vector inicial nulo.

c) Obtener la factorización de Doolite a partir del proceso de eliminación Gaussiana simple.

d) Resuelva los dos sistema triangulares resultantes en c) y muestre el valor de las tensiones buscadas.

**Solución:**

a)

$$\begin{bmatrix} -2/7 & 3/7 & 2/7 \\ 3/7 & 2/7 & -3/7 \\ 6/7 & 6/7 & 6/7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \vec{T}_{BA} \\ \vec{T}_{CA} \\ \vec{T}_{DA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 200 \end{bmatrix}$$

b)

$$T_j = \begin{bmatrix} 0 & 1.5 & 1 \\ -1.5 & 0 & 1.5 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\rho(T_j) = 2.1851$ no es menor que 1.

Habrá divergencia

c)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/2 & 1 & 0 \\ -3 & 30/13 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2/7 & 3/7 & 2/7 \\ 0 & 13/14 & 0 \\ 0 & 0 & 12/7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \vec{T}_{BA} \\ \vec{T}_{CA} \\ \vec{T}_{DA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 200 \end{bmatrix}$$

d)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/2 & 1 & 0 \\ -3 & 30/13 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 200 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 200 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2/7 & 3/7 & 2/7 \\ 0 & 13/14 & 0 \\ 0 & 0 & 12/7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \vec{T}_{BA} \\ \vec{T}_{CA} \\ \vec{T}_{DA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \vec{T}_{BA} \\ \vec{T}_{CA} \\ \vec{T}_{DA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 350/3 \\ 0 \\ 350/3 \end{bmatrix}$$

**Problema 3**

La matriz de tensiones en un punto interior de un solido elástico, referida a un sistema cartesiano ortogonal es: $[\mathrm{T}] = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & -12 & 1 \end{bmatrix} \mathrm{N/mm^2}$, si las 3 tensiones principales son los autovalores de dicha matriz y los autovectores son las direcciones de cada tensión, resuelva lo siguiente:

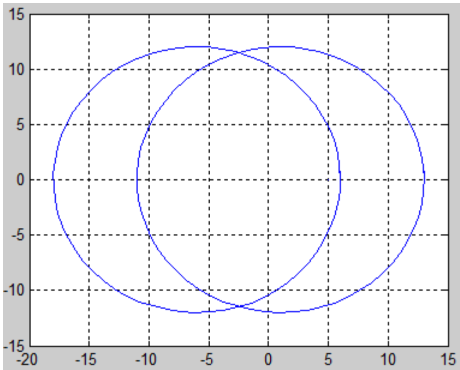
a) Considerando el teorema de Gershgorin y que todos los valores de las tensiones son reales, indique en que rango se encuentran todas las tensiones

b) Determine la mayor tensión principal en absoluto y su respectiva dirección usando algún método iterativo, usando como dirección tentativa [0 1 0.7]t , con un error en la tensión de 0.8, indique todos los resultados parciales de cada paso.

c) Desarrolle una rutina en Matlab que resuelva el ítem b con un error en la tensión de 10-10

**Solución:**

a) Dibujando los círculos de Gersh…,




El rango posible es -18 hasta 13

b) Usando el método de la potencia

| | | | Autovector |
|---|---|---|---|
| Iteración 1: | Lam =-14.4000 | ---- | (-0.0000,1.0000,0.7847) |
| Iteración 2: | Lam =-15.4167 | (error=1.01667) | (-0.0000,1.0000,0.7275) |
| Iteración 3: | Lam =-14.7297 | (error=0.68694) | (-0.0000,1.0000,0.7653) |

Por lo tanto: la mayor tensión es aproximadamente de -14.7297 y su dirección es (0,1,0.7653)

c) La rutina seria:

```
u=[0 1 0.7]';
MAXITE=10;
TOL=1e-10;
la=0;
er=1;
while er>TOL
    y=A*u;
    [m,p]=max(abs(y));
    lam=y(p);yn=y/lam;
    u=yn;
    er=abs(la-lam);
    la=lam;
end
```

## Problema 4

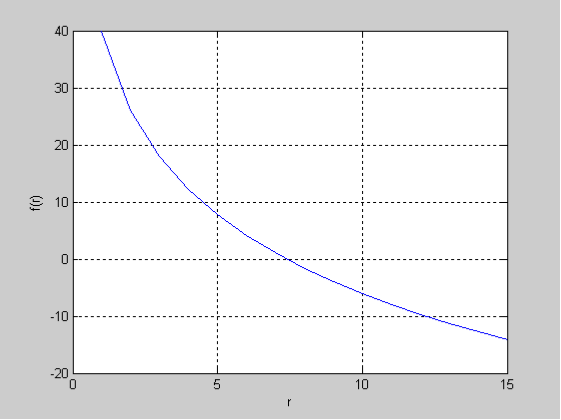
En investigaciones realizadas en estudios ecológicos sobre comunicaciones entre aves, es necesario determinar el rango de los niveles de decibeles para el trino de ellas. El nivel del sonido (en decibeles db) a la distancia **r** (en metros) desde una fuente emisora es:

$$L = Lo - 20_{*}\ln(r) - \beta_{*}r$$

Donde **Lo** es el nivel de decibeles a 1 mt. desde la fuente, **β** es un coeficiente de atenuación cuyo valor es determinado por las condiciones físicas del aire que intervienen (viscosidad, temperatura, humedad, etc.). Si el nivel **L** es 40 db, **Lo**=80 db y **β** = $1.15x10^{-3}$ db/mt, se pide:

a) Localice la(s) raíz(ces) r en el intervalo a=1, b=15.
b) Determine r mediante el método de Bisección. Use un intervalo inicial de longitud 2 (realice 03 iteraciones).
c) Con el intervalo de la tercera iteración, ingrese al método de Newton-Raphson y consiga un buen valor inicial para que se asegura una convergencia en 3 c.s.e. Realice no más de cuatro iteraciones.
d) ¿Existe una función de recurrencia $\mathbf{r_{n+1}=F(r_n)}$ ó $\mathbf{r_{n+1}=G(r_n)}$ que cumpla con la condición de convergencia del punto fijo? Si su respuesta es afirmativa determine **F( r ) ó G( r ).**

**Solución:**
Sol
a) $f(r) = 40 - 20*\ln(r) - 1.15*10^{-3}*r = 0$




b)Bisección
a=6 ; b=8
f(a)=+ f(b)=- ➔f(a)*f(b)<0

| a | b | x | f(a) | f(b) | f(x) |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 8 | 7 | + | - | + |
| 7 | 8 | 7.5 | + | - | - |
| 7 | 7.5 | 7.25 | + | - | + |

c)Newton Raphson

$r_0$=7.3

$$f(r) = 40 - 20 * \ln(r) - 1.15 * 10^{-3} r$$

$$f'(r) = -20/r - 1.15 * 10^{-3}$$

$$f''(r) = 20/r^2$$

$$\left| \frac{f(r_0) f''(r_0)}{[f'(r_0)]^2} \right| \leq d = 0.012 < 0.5$$

| r | f(r) | f'(r) | Error |
|---|---|---|---|
| 7.3 | 0.2341 | -2.7409 | -0.0854 |
| 7.3854 | 0.0014 | -2.7092 | -5.0146e-4 |
| 7.3859 | 4.61e-8 | -2.7090 | -1.7017e-8 |

d) $r = e^{\frac{40-1.15*10^{-3} r}{20}} = F(r)$

Condición de Convergencia

$$|F'(r)| = \left| \frac{-1.15e^{-3}}{20} e^{\frac{40-1.15e^{-3}}{20}} \right| = 4.2469\text{e - }4 < 1$$ Cumple el criterio de Convergencia

Algoritmo

$$r_{k+1} = e^{\frac{40-1.15*10^{-3} r_k}{20}} = F(r_k)$$

**Los Profesores**